零和自由序列 F（5）的刻画*

官欢欢，曾祥能，袁平之
（中山大学数学与计算科学学院，广东 广州 510275）

摘　要：设 G 是有限阿贝尔群，S 是元素在 G 中的平方自由，零和自由序列。$f(S)$ 表示 G 中满足如下条件的元素的个数：可以表示成 S 的一个非空子序列和的元素的个数。已知当 $|S| = 5$ 时，有 $f(S) \geqslant 13$。刻画了当 $f(S) = 13$ 时 S 的所有情形。

关键词：零和自由；平方自由；序列
中图分类号：O156.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0529－6579（2010）03－0001－04

Description of the Invariant F（5）of Zero-Sum-Free Sequence

GUAN Huanhuan, ZENG Xiangneng, YUAN Pingzhi
(School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Let G be a finite abelian group, and let S be a square-free, zero-sum-free sequence of elements in G. Let $f(S)$ denote the number of elements in G which can be expressed as the sum over a nonempty subsequence of S. When the length of S equals to 5, the result $f(S) \geqslant 13$ is obtained. All cases of S when $f(S) = 13$ are described.

Key words: zero-sum-free; square free; sequence

设 G 是有限阿贝尔群，S 是 G 的子集合。记 $f(G,S) = f(S)$ 表示 G 中满足如下条件的非零元素的个数：可以用 S 的一个子集合的和表示的非零元素个数。对整数 $k \in N$，记 $f(k) = \min\{f(A,T): A$ 是有限阿贝尔群，$T \subset A$ 是长度为 k 的零和自由序列$\}$。

1972 年，Eggleton 等[1] 首先给出了不变量 $f(k)$ 的定义，并且证明了对任意 $k \in \mathbb{N}$，$f(k) \leqslant \left[\frac{1}{2}k^2\right] + 1$，其中 G 是循环群，S 是 G 的长度为 k 的子集合（证明细节见文［2］，Section 5.3）。1975 年，Olson[3] 证明了 $f(k) \geqslant \frac{1}{9}k^2$。进一步，Eggleton 和 Erdös 给出了当 $k \leqslant 5$ 时，$f(k)$ 的值，且提出了下列猜想（当 $k \leqslant 5$ 时结论是正确的）：

猜想　对每个 $k \in N$，存在循环群 G 以及 G 的长度为 k 的平方自由，零和自由序列 S，使得 $f(k) = f(G,S)$。

除了常数 $f(k)$ 本身的作用，常数 $f(k)$ 在组合和加法数论的各种各样问题的研究中也是非常有用的工具。Eggleton 等在文献［1］中提到，在文献［4］的附录中他们给出了 $f(5) = 13$ 的证明。而高维东等[5] 证明了 $f(6) = 19$，同时也给出了 $f(5) = 13$ 的另一种证明。但是他们均没有给出当等号成立时 S 的刻画。文献［6－10］给出了 $f(S)$ 的一些结果。本文给出了 $f(5) = 13$ 时 S 具体的刻画。

定理 1　设 G 是有限阿贝尔群，且 $|G| \geqslant 14$。如果 $S \subset G$ 是长度为 $|S| = 5$ 的平方自由，零和自由序列且 $f(S) = 13$，则 S 为如下的形状之一：

(i) $S = x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2) \cdot 2x_2 \cdot (x_1 + 2x_2)$，其中 $\mathrm{ord}(x_1) = 2$；

(ii) $S = -2x \cdot x \cdot 3x \cdot 4x \cdot 5x$，其中 $\mathrm{ord}(x) = 14$。

* 收稿日期：2009－05－15
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10971072）；广东省自然科学基金资助项目（8151027501000114）
作者简介：官欢欢（1984 年生），女，博士生；E-mail：ghuanh@student.sysu.edu.cn

1 符号说明

设 $\mathbb{R}$ 为实数集，$\mathbb{Z}$ 为整数集，$\mathbb{N}$ 为正整数集合，$N_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$。对实数 $a,b\in\mathbb{R}$，记 $[a,b]=\{x\in\mathbb{Z}\mid a\leqslant x\leqslant b\}$。设 $F(G)$ 是以 G 为基的自由乘法阿贝尔幺半群。$F(G)$ 中的元素称为 G 上的序列。$F(G)$ 中的单位元素 1 称为空序列，记为 Ø，其长度为 0。$S\in F(G)$ 记为 $S=g_1\cdots g_l=\prod_{g\in G}g^{\nu_g(S)}$，其中 $\nu_g(S)\in N_0$ 为 g 在序列 S 中出现的次数，称为 g 在 S 中的重数。记 $h(S)=\max_{g\in G}\{\nu_g(S)\}$ 是序列 S 的最大重数。若有 $\nu_g(S)>0$，称 S 包含元素 g，记为 $g\mid S$。记 Sg^{-1} 是序列 S 中去掉一个 g 所剩下的元素组成的子序列。如果 $\nu_g(S)\leqslant 1$，称 S 为平方自由序列。

1）序列 $T\in F(G)$ 称为序列 S 的子序列，如果 $\nu_g(T)\leqslant\nu_g(S)$ 对所有的 $g\in G$。

2）给定群同态 $\varphi:G\to G_0$，定义 $\varphi(S)=\varphi(g_1)\cdots\varphi(g_l)$，则 φ 为 $F(G)$ 上的同态。

3）对于序列 S，称 $|S|$ 为 S 的长度：$|S|=l=\sum_{g\in G}\nu_g(S)\in N_0$。

4）记 supp（S）$=\{g\in G\mid\nu_g(S)>0\}\subset G$。

5）$\sigma(S)$ 表示序列 S 的和，即 $\sigma(S)=\sum_{i=1}^{l}g_i$。如果 $\sigma(S)=0$，称 S 为零和序列。

6）对任意的 $k\in\{1,2,\cdots,l\}$，记：

$$\sum_k(S)=\{g_{i_1}+g_{i_2}+\cdots+g_{i_k}\mid 1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant l\},$$

$$\sum_{\leqslant k}(S)=\bigcup_{i=1}^{k}\sum_i(S),$$

$$\sum_{\geqslant k}(S)=\bigcup_{i=k}^{l}\sum_i(S),\quad \sum(S)=\bigcup_{i=1}^{l}\sum_i(S)$$

如果 $0\notin\sum(S)$，称 S 为零和自由序列。

2 常数 $f(k)$ 的结果

设 $S=x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_k\in F(G)$ 是长度为 $|S|=k\in\mathbb{N}$ 的平方自由，零和自由序列。设 A 是 S 的所有非平凡子序列的集合，将 A 分割为一些集类的并 $A=A_1\cup\cdots\cup A_r$（见文献［5］），其中如果 S 的两个子序列 T，T' 满足 $\sigma(T)=\sigma(T')$，则对某个 $v\in[1,r]$，有 $T,T'\in A_v$。因此 $r=f(S)=|\sum(S)|$。设 $B\subset A$，记 $\overline{B}=\{ST^{-1}\mid T\in B\}$，则对每个 $v\in[1,r]$，显然有 $\overline{A_v}\in\{A_1,\cdots,A_r\}$，称 $\overline{A_v}$ 是 A_v 的对偶类。对 S 的非平凡子序列 T，记 $[T]$ 为 T 所在的集类。记 P_n 为关于 $[1,n]$ 的对称群。下面介绍几个关于常数 $f(k)$ 的结果。

引理1 ［2，Theorem 5.3.1］设 $t\in\mathbb{N}$，$S=S_1\cdots S_t$ 是零和自由序列，则 $f(S)\geqslant f(S_1)+\cdots+f(S_t)$。

引理2 ［2，Corollary 5.3.4.1］$f(1)=1$，$f(2)=3$，$f(3)=5$，$f(4)=8$。

引理3 ［5，Lemma 2.3］设 $S=S_1S_2\in F(G)$，$H=<\mathrm{supp}(S_1)>$。记 $\varphi:G\to G/H$ 为标准满同态，则有 $f(S)\geqslant(1+f(\varphi(S_2)))f(S_1)+f(\varphi(S_2))$。

引理4 ［5，Lemma 3.1］符号如上。设 $i\in[1,r]$，则下面的结论成立：

1）设 $B\subset A$，则 $B\in\{A_1,\cdots,A_r\}$ 当且仅当 $\overline{B}\in\{A_1,\cdots,A_r\}$，且 $|B|=|\overline{B}|$。

2）A_i 的对偶类是它本身当且仅当对某个 $T\in A_i$ 有 $\sigma(T)=\sigma(ST^{-1})$。

3）如果 A_i 包含子序列 T，T' 满足 $|T|=1$，$|T'|=k-1$，则 $S=TT'$ 且 $A_i=\{T,T'\}$。

4）如果 A_i 的对偶类是 A_i 本身，且 A_i 包含一个长度为 1 的子序列，则 $|A_i|=2$。

5）如果 A_i 的对偶类是 A_i 本身，则 $|A_i|$ 是偶数。

6）$[S]=\{S\}$。

引理5 ［5，Lemma 5.1］设 S 不包含阶为 2 的元素。则下面的结论成立：

1）如果 $k\leqslant 4$，那么对每个 $i\in[1,r]$，有 $|A_i|\leqslant 2$。

2）如果 $k=5$，那么对每个 $i\in[1,r]$，有 $|A_i|\leqslant 3$。

3）如果 $k=6$，那么对每个 $i\in[1,6]$，有 $|[x_i]|=|\overline{[x_i]}|\leqslant 4$，且对每个 $i\in[1,r]$，有 $|A_i|\leqslant 5$。

设 $S=x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5$，$t_j=|\{i\mid |A_i|=j\}|$，其中 $j\in[1,13]$。由引理5知 $j=1,2,3$。因此有下述的方程组

$$\begin{cases}t_1+t_2+t_3=13\\ t_1+2t_2+3t_3=31\end{cases}\tag{1}$$

即

$$\begin{cases}t_1=t_3-5\\ t_2=18-2t_3\end{cases}\tag{2}$$

下面给出几个结论，证明略。

引理6 如果 $A_i=\{T_1,\cdots,T_n\}$，称 A_i 为 $(|T_1|,\cdots,|T_n|)$－型。如 $x_1=x_2+x_3=x_4+x_5$ 称为 $(1,2,2)$－型。那么有如下结论：

1）设 $\tau \in P_5$。若对某个 $1 \leqslant i \leqslant 5$，有 $|[x_i]| = 3$，则 $[x_i]$ 为下列形状之一：

(i) $x_{\tau(1)} = \{x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)} \cdot x_{\tau(3)}, x_{\tau(4)} \cdot x_{\tau(5)}\}$；

(ii) $x_{\tau(1)} = \{x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)} \cdot x_{\tau(3)}, x_{\tau(2)} \cdot x_{\tau(4)} \cdot x_{\tau(5)}\}$。

即 $[x_i]$ 是 $(1,2,2)$ - 型或 $(1,2,3)$ - 型。

2）设 $x_j \notin A_i$ 且 $A_i \neq \overline{[x_j]}$ 对于任意的 $j \in [1,5]$。若 $|A_i| = 3$，则 A_i 为下列形状之一：

(i) $A_i = \{x_{\tau(1)} \cdot x_{\tau(2)}, x_{\tau(3)} \cdot x_{\tau(4)}, x_{\tau(1)} \cdot x_{\tau(3)} \cdot x_{\tau(5)}\}$；

(ii) $A_i = \{x_{\tau(3)} \cdot x_{\tau(4)} \cdot x_{\tau(5)}, x_{\tau(1)} \cdot x_{\tau(2)} \cdot x_{\tau(5)}, x_{\tau(2)} \cdot x_{\tau(4)}\}$。

即 A_i 是 $(2,2,3)$ - 型或 $(3,3,2)$ - 型，且这两种类型根据对偶关系是一一对应的。

引理 7　t_3 是偶数。

证明　如果 $|A_i| = 3$，对某个 $i \in [1,13]$，则 $\overline{|A_i|} = 3$，且 $A_i \neq \overline{A_i}$。若 $A_i = \overline{A_i}$，由引理 4 知 $|A_i| = |\overline{A_i}| = 2$。

引理 8　由方程组（2）和引理 4，或者有 $t_1 = 1, t_2 = 6, t_3 = 6$ 成立，或者有 $t_1 = 3, t_2 = 2, t_3 = 8$ 成立。进一步有 $t_1 + t_2 \leqslant 7$。

引理 9　设 $|A_i| = 3$ 为 $(2,2,3)$ - 型。则 $A_i = \{x_{\tau(1)} \cdot x_{\tau(2)}, x_{\tau(3)} \cdot x_{\tau(4)}, x_{\tau(1)} \cdot x_{\tau(3)} \cdot x_{\tau(5)}\}$ 当且仅当 $\begin{cases} x_{\tau(2)} = x_{\tau(3)} + x_{\tau(5)} \\ x_{\tau(4)} = x_{\tau(1)} + x_{\tau(5)} \end{cases}$。

3　定理 1 的证明

设 $S = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5$ 是平方自由，零和自由序列。

情形 Ⅰ：S 中有阶为 2 的元素。

不失一般性，设 $\mathrm{ord}(x_1) = 2$。从而设 $S = S_1 S_2$，其中 $S_1 = x_1, S_2 = x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5$。那么显然有 $f(S_1) = 1$。设 $H = \langle x_1 \rangle$，$\varphi: G \to G/H$ 为标准满同态，则 $\varphi(S_2) = \varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)\varphi(x_5)$。断言：$\varphi(S_2)$ 是零和自由的，且 $h(\varphi(S_2)) \leqslant 2$。

若存在 S_2 的子序列 U 使得 $\sigma(\varphi(U)) = \varphi(\sigma(U)) = 0$，则 $\sigma(U) \in H$。因为 S 是零和自由序列，所以 $\sigma(U) \neq 0$，从而 $\sigma(U) = x_1$。但是 $\sigma(US_1) = x_1 + x_1 = 0$，矛盾。

若存在 $\varphi(x_{i_1}) = \varphi(x_{i_2}) = \varphi(x_{i_3})$，其中 $2 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant 5$，则 $\varphi(x_{i_1} - x_{i_2}) = \varphi(x_{i_1} - x_{i_3}) = 0$，即 $x_{i_1} - x_{i_2}$,。因为 S 是平方自由的，故 $x_{i_1} - x_{i_2} = x_{i_1} - x_{i_3} = x_1$，即 $x_{i_2} = x_{i_3}$，矛盾。

1）$\varphi(S_2)$ 形如 $abcd$。因为 $f(4) = 8$，故 $f(\varphi(S_2)) \geqslant 8$。从而由引理 3 知 $f(S) \geqslant 2 \times 8 + 1 = 17$。

2）$\varphi(S_2)$ 形如 a^2bc。设 $\varphi(S_2) = \varphi(x_2)^2\varphi(x_3)\varphi(x_4)$，则由引理 1 与引理 3 得 $f(\varphi(S_2)) \geqslant f(\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)) + f(\varphi(x_2)) \geqslant 6 + 1 = 7$。故 $f(S) \geqslant 2 \times 7 + 1 = 15$。

3）$\varphi(S_2)$ 形如 a^2b^2。不妨设 $S = x_1x_2(x_1 + x_2)x_4(x_1 + x_4)$，此时只有当 $2x_1 = 0, x_4 = 2x_2$，$\mathrm{ord}(x_2) \geqslant 7$ 时，$f(S) = 13$。

情形 Ⅱ：S 中没有阶为 2 的元素。

1）若对 $1 \leqslant j \leqslant 5$ 均有 $|[x_j]| \leqslant 2$，则存在某个 i，使得 A_i 为 $(2,2,3)$ - 型。不妨设 $A_i = \{x_1x_2, x_3x_4, x_1x_3x_5\}$，从而就有 $\begin{cases} x_2 = x_3 + x_5 \\ x_4 = x_1 + x_5 \end{cases}$。故 $[x_2]$ 与 $[x_4]$ 为 $(1,2)$ - 型。从而至少有 $[x_1]$，$[x_2]$，$[x_3]$，$[x_4]$，$[x_5]$，$\overline{[x_2]}$，$\overline{[x_4]}$，$[S]$ 8 个满足 $|A_i| \leqslant 2$，与 $t_1 + t_2 \leqslant 7$ 矛盾。因此存在某个 $1 \leqslant j \leqslant 5$ 使得 $|[x_j]| = 3$。

2）不妨设 $|[x_1]| = 3$。若 $[x_1]$ 为 $(1,2,2)$ - 型，不妨设 $x_1 = \{x_1, x_2x_3, x_4x_5\}$。

(i) 对 $1 \leqslant i \leqslant 5$，仅有一个 i，使得 $|[x_i]| = 3$，则对 $2 \leqslant i \leqslant 5$ 均有 $|[x_i]| \leqslant 2$。

由引理 8 知，至少有一个 A_k 为 $(2,2,3)$ - 型，使得存在某个 $[x_i]$ 为 $(1,2)$ - 型，其中 $2 \leqslant i \leqslant 5$。不妨设 $x_2 = x_l + x_m$，则 $x_lx_m \mid x_3x_4x_5$。设 $x_2 = x_3 + x_4$，但是 $(2,2,3)$ - 型有两组以上，而 $x_1 = x_2 + x_3 = x_4 + x_5, x_2 = x_3 + x_4$，不满足引理 9 中形状的 2 个等式。故存在某个 $x_r = x_s + x_t$，其中 $3 \leqslant r \leqslant 5$。若 $r = 3$，则有 $x_3 = x_4 + x_5 = x_1$，矛盾。若 $r = 4$，则有 $x_4 = x_3 + x_5$，则可得 $x_1 = 5x_3, x_2 = 4x_3, x_4 = 3x_3$，$x_5 = 4x_3$，从而 $f(S) = 15$。若 $r = 5$，有 $x_sx_t \mid x_2x_3x_4$。①$x_sx_t = x_2x_3$，则 $x_5 = x_1$。②$x_sx_t = x_3x_4$，则 $x_5 = x_2$。③$x_sx_t = x_2x_4$，即 $x_5 = x_2 + x_4$，从而 $x_1 = 5x_4, x_2 = 3x_4$，$x_3 = 2x_4$，$x_5 = 4x_4$，即有 $f(S) = 15$。

因此至少存在一个 $i \in [2,5]$ 使得 $|[x_i]| = 3$。

(ii) 不妨设 $|[x_2]| = 3$。

(a) 若 $[x_2]$ 为 $(1,2,2)$ - 型，显然矛盾。

(b) 若 $[x_2]$ 为 $(1,2,3)$ - 型，则有 $x_2 = x_3 + x_4$ 或 $x_2 = x_3 + x_5$（两种情形对称）。下设 $x_2 = x_3 + x_4$。因此 $x_2 = x_1 + x_3 + x_5$ 或 $x_2 = x_1 + x_4 + x_5$，从而有 $x_4 = x_1 + x_5$ 或 $x_3 = x_1 + x_5$。若 $x_4 = x_1 + x_5$，则有 $2x_5 = 0$，矛盾。若 $x_3 = x_1 + x_5$，则有 $x_2 + x_5 = 0$，矛盾。

3）设 $|[x_1]| = 3$，为 $(1,2,3)$ - 型。不妨设 $[x_1] = \{x_1, x_2x_3, x_2x_4x_5\}$，从而有 $x_3 = x_4 + x_5$。

(i) 若对 $2 \leqslant j \leqslant 5$ 均有 $|[x_j]| \leqslant 2$，由引理 4

知，至少存在一个 A_i 为$(2,2,3)$ －型。从而存在 $k \neq 1,3$，使得 $x_k = x_m + x_n$。

若 $k = 2$，则有 $x_2 = x_3 + x_4$ 或 $x_2 = x_3 + x_5$（两种情形是对称的），从而有 $x_1 = x_2 + x_3$，$x_3 = x_4 + x_5$，$x_2 = x_3 + x_4$ 或 $x_2 = x_3 + x_5$，显然不满足引理 9 中的两个等式。故必有 $r = 4$ 或 $r = 5$ 使得$[x_r]$ 为$(1,2)$ －型。所以 $|A_i| \leqslant 2$ 的个数至少有$[x_2]$，$[x_3]$，$[x_4]$，$[x_5]$ 与$\overline{[x_2]}$，$\overline{[x_3]}$，$\overline{[x_r]}$，$[S]$ 8 个，与 $t_1 + t_2 \leqslant 7$ 矛盾。

若 $k = 4$，则有 $x_4 = x_2 + x_5$，只能对应一个$(2,2,3)$ －型$\{x_3x_4, x_1x_5, x_2x_3x_5\}$。而$(2,2,3)$ －型不止一组，因此存在 $r = 2$ 或 $r = 5$ 使得 $x_r = x_s + x_t$ 为$(1,2)$ －型，由上面的讨论，得出矛盾。$k = 5$ 的情形同 $k = 4$ 一样，略。故至少存在某个 $2 \leqslant i \leqslant 5$ 使得 $|[x_i]| = 3$，且为$(1,2,3)$ －型。

（ii）设 $|[x_2]| = 3$，则有 $x_2 = x_3 + x_4$ 或 $x_2 = x_3 + x_5$（两种情况是对称的）。考虑 $x_2 = x_3 + x_4$。若 $x_2 = x_1 + x_3 + x_5$，即 $x_4 = x_1 + x_5$，从而就有 $x_1 = 5x_3$，$x_2 = 4x_3$，$x_4 = 3x_3$，$x_5 = -2x_3$。为使 $f(S) = 13$，只有 $\mathrm{ord}(x_3) = 14$。

（iii）设 $|[x_3]| = 3$，则 $x_3 = x_4 + x_5 = x_1 + x_2 + x_4$ 或 $x_1 + x_2 + x_5$（两种情况对称）。考虑 $x_3 = x_4 + x_5 = x_1 + x_2 + x_4$，则 $x_5 = x_1 + x_2$。

（a）设 $|[x_5]| = 3$。若$[x_5]$ 为$(1,2,2)$ －型，则回到了 2）的讨论。故$[x_5]$ 为$(1,2,3)$ －型。

若 $x_5 = x_1 + x_2 = x_1 + x_3 + x_4$，则有 $x_2 = x_3 + x_4$，从而 $x_1 = 4x_2$，$x_3 = 3x_2$，$x_4 = -2x_2$，$x_5 = 5x_2$，$x_5 = 5x_2$。当且仅当 $\mathrm{ord}(x_2) = 14$ 时，$f(S) = 13$。

若 $x_5 = x_1 + x_2 = x_2 + x_3 + x_4$，则有 $x_1 = x_3 + x_4$。矛盾。

（b）设 $|[x_5]| = 2$，从而可知 $|[x_2]| \leqslant 2$，$|[x_4]| \leqslant 2$（否则回到 3）的（ii）或 2）的讨论）。因为 $t_3 \geqslant 6$，所以至少存在另外的一个$(2,2,3)$ －型 A_i 使得 $k = 2$ 或 $k = 4$ 为$(1,2)$ －型。

若 $x_2 = x_m + x_n$，则 $x_mx_n \mid x_3x_4$。从而有 $x_5 = x_1 + x_2 = x_1 + x_3 + x_4$，矛盾。

若 $x_4 = x_m + x_n$，则 $x_mx_n \mid x_1x_2x_5$，即 $x_4 = x_1 + x_5$ 或 $x_4 = x_2 + x_5$，但其均构造不了引理 9 中的两个等式，矛盾。

（iv）设 $|[x_4]| = 3$ 为$(1,2,3)$ －型。此时 $|[x_2]| \leqslant 2$，$|[x_3]| \leqslant 2$，则 $x_4 = x_i + x_j$，且 $x_ix_j \mid x_1x_2x_5$。

（a）若 $x_4 = x_1 + x_2$，由 $x_1 = x_2 + x_3 = x_2 + x_4 + x_5$，则有 $x_3 = x_4 + x_5 = x_1 + x_2 + x_5$。与 $|[x_3]| \leqslant 2$ 矛盾。

（b）若 $x_4 = x_1 + x_5$，则有 $x_4 = x_1 + x_5 = x_1 + x_2 + x_3$ 或 $x_4 = x_1 + x_5 = x_5 + x_2 + x_3$。

若 $x_4 = x_1 + x_5 = x_1 + x_2 + x_3$，则有 $x_5 = x_2 + x_3 = x_1$。矛盾。

若 $x_4 = x_1 + x_5 = x_5 + x_2 + x_3$，则取 $\tau \in P_5$ 使得 $\tau(1) = 2$，$\tau(2) = 5$，$\tau(3) = 4$，$\tau(4) = 1$，此时与 3）的（iii）的讨论一样。

（c）若 $x_4 = x_2 + x_5$，则有 $x_4 = x_2 + x_5 = x_1 + x_2 + x_3$ 或 $x_4 = x_2 + x_5 = x_5 + x_1 + x_3$。

若 $x_4 = x_2 + x_5 = x_1 + x_2 + x_3$，则有 $x_5 = x_1 + x_3$。而 $x_3 = x_4 + x_5 = x_1 + x_3 + x_4$，矛盾。

若 $x_4 = x_2 + x_5 = x_5 + x_1 + x_3$，则有 $x_2 = x_1 + x_3$。而 $x_1 = x_2 + x_3 = x_2 + x_4 + x_5$，故有 $2x_3 = 0$。与 x_3 不是 2 阶元矛盾。

（v）设 $|[x_5]| = 3$ 为$(1,2,3)$ －型。此时与 3）的（iv）的情形是一样的，略。

证毕。

参考文献：

[1] EGGLETON R B, ERDÖS P. Two combinatorial problems in group theory [J]. Acta Arith, 1972, 21: 111－116.

[2] GEROLDINGER A, HALTER-KOCH F. Non-unique factorizations [M]. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2006: 320－325.

[3] OLSON J E. Sums of sets of group elements [J]. Acta Arith, 1975, 28: 147－156.

[4] EGGLETON R B, ERDÖS P. Two combinatorial problems in group theory [C]. Dept of Math, Stat and Comp Sci, U of Calgary, 1971: 117.

[5] GAO W D, LI Y, PENG J, et al. Subsums of a zero-sum free subset of an abelian group [J]. European J Combin, 2008, 15: 116.

[6] GAO W D, GEROLDINGER A. Zero-sum problems in finite abelian groups: A survey [J]. Expo Math, 2006, 24: 337－369.

[7] BOVEY J D, ERDÖS P, NIVEN I. Conditions for zero sum modulo n [J]. Canad Math Bull, 1975, 18: 27－29.

[8] YUAN P Z. On the index of minimal zero-sum sequences over finite cyclic groups [J]. J Combin Theory Ser A, 2007, 114: 1545－1551.

[9] ADHIKARI S D, CHEN Y G, FRIEDLANDER J B, et al. Contributions to zero-sum problems [J]. Discrete Math, 2006, 306: 1－10.

[10] ERDÖS P, GINZBURG A, ZIV A. Theorem in the additive number theory [J]. Bull Res Council Israel, 1961, 10F: 41－43.